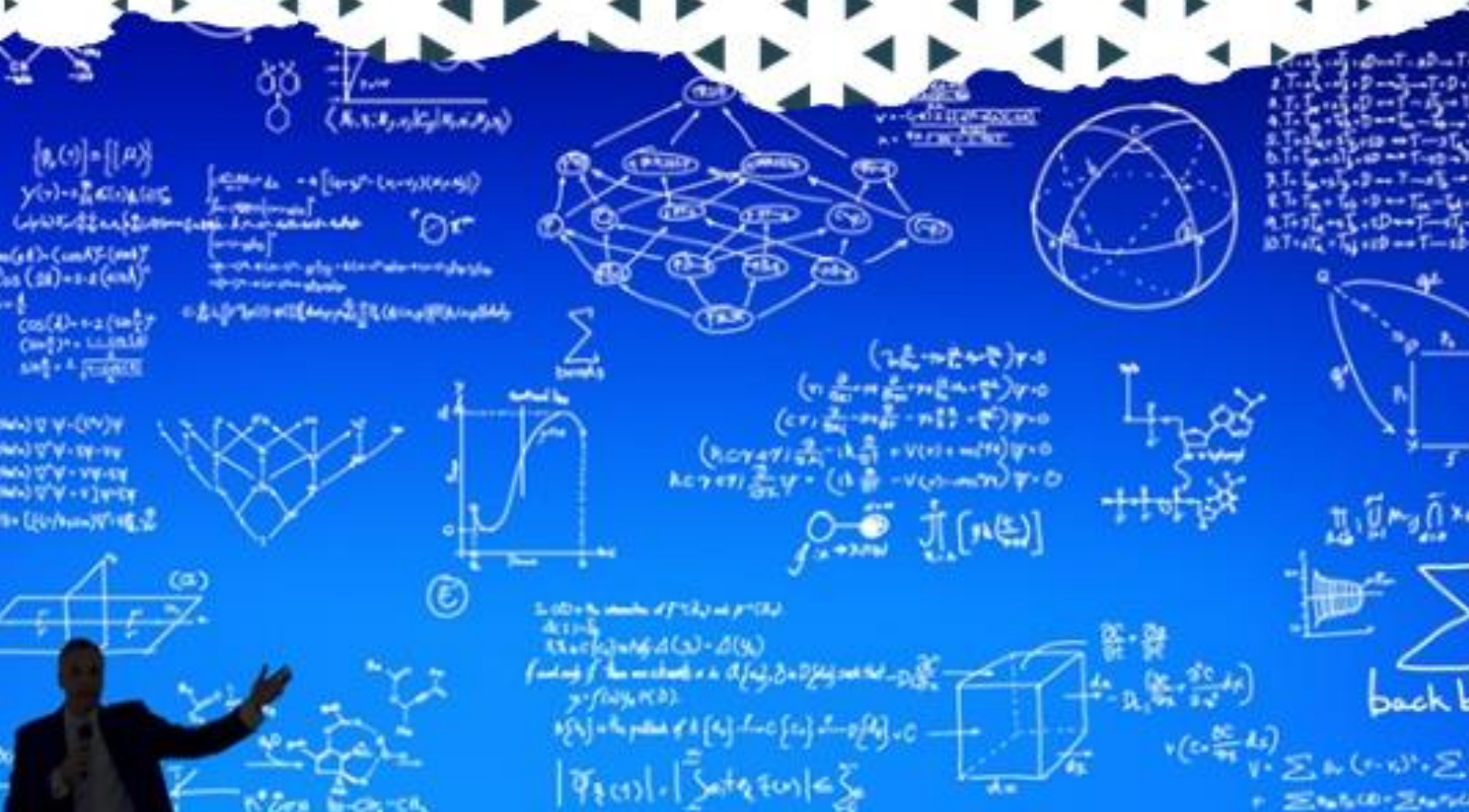




INNOVATIVE WORLD
Ilmiy tadqiqotlar markazi

ZAMONAVIY ILM-FAN VA TA'LIM: MUAMMO VA YECHIMLAR ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA



Google Scholar  zenodo  OpenAIRE



+998335668868

<https://innoworld.net>

2026



**«INNOVATIVE WORLD» ILMIY TADQIQOTLARNI QO'LLAB-
QUVVATLASH MARKAZI**

**«ZAMONAVIY ILM-FAN VA TADQIQOTLAR: MUAMMO VA
YECHIMLAR» NOMLI 2026-YIL № 3-SONLI ILMIY, MASOFAVIY,
ONLAYN KONFERENSIYASI**

**ILMIY-ONLAYN KONFERENSIYA TO'PLAMI
СБОРНИК НАУЧНЫХ-ОНЛАЙН КОНФЕРЕНЦИЙ
SCIENTIFIC-ONLINE CONFERENCE COLLECTION**

Google Scholar



ResearchGate

zenodo



ADVANCED SCIENCE INDEX



Directory of Research Journals Indexing

www.innoworld.net

O'ZBEKISTON-2026

BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN MAXSUS YECHIMLAR NAZARIYASI

Omonov G'. T.

Termiz davlat pedagogika instituti, Matematika va informatika kafedrası, Termiz,
O'zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun maxsus yechimlar nazariyasi tahlil qilinadi. Singular yechimlarning ta'rifi, ularni aniqlash usullari — p-diskriminant va C-diskriminant metodlari — batafsil yoritiladi. Kler va Lagranj tenglamalari misolida maxsus yechimlarning geometrik talqini va amaliy ahamiyati ko'rsatiladi. Mavjud adabiyotlardagi nazariy yondashuvlar qiyosiy tahlil qilinadi.

Kalit so'zlar: differensial tenglama, maxsus yechim, singular yechim, p-diskriminant, C-diskriminant, Kler tenglamasi, Lagranj tenglamasi, og'ib o'tuvchi.

KIRISH. Differensial tenglamalar nazariyasi zamonaviy matematikaning asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, u fizika, mexanika, biologiya va iqtisodiyot kabi sohalarida keng qo'llaniladi. Birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun umumiy yechim, qoida tariqasida, bir nechta ixtiyoriy doimiylarni o'z ichiga oladi. Biroq, ba'zi tenglamalar shunday yechimga ega bo'ladiki, u umumiy yechimning maxsus holati emas — bunday yechimlar maxsus (singular) yechimlar deb ataladi.

Maxsus yechimlar masalasi XVIII asrdan beri matematik tadqiqotlar diqqat markazida bo'lib kelgan. G.V.Leybnits va J.Bernulli tomonidan ibtidoiy tarzda o'rganilgan bu masala, keyinchalik A.Koshi, A.Kler va J.L.Lagranj asarlarida sistemali tarzda rivojlantirildi [1, 14-bet]. Hozirgi kunda maxsus yechimlar nazariyasi differensial geometriya, optimal boshqaruv nazariyasi va variatsion hisob bilan uzviy bog'liq holda rivojlanib bormoqda.

Ushbu maqolada biz birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun maxsus yechimlarning asosiy tushunchalari va ularni aniqlash algoritmlarini izchil bayon etamiz, shuningdek Kler va Lagranj tenglamalari kabi klassik sinflar uchun maxsus yechimlarni topish metodlarini ko'rib chiqamiz.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODLAR. Birinchi tartibli differensial tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$F(x, y, y') = 0,$$

bu yerda F — berilgan funksiya. Tenglamaning umumiy yechimi deb shunday $\Phi(x, y, C) = 0$ munosabatga aytiladiki, u har qanday C doimiy qiymati uchun tenglamani qondiradi va Koshi shartini qondira oladi [2, 87-bet].

Ta'rif 1. $y = \varphi(x)$ funksiya **maxsus yechim** deyiladi, agar u: (1) $F(x, y, y') = 0$ tenglamani qondirsa; (2) umumiy yechimning birorta maxsus holati bo'lmasa, ya'ni hech qanday C qiymati uchun $\Phi(x, \varphi(x), C) \equiv 0$ bo'lmasa.

Geometrik jihatdan maxsus yechim integral egri chiziqlarning ogib o'tuvchisi (envelope) hisoblanadi — bu bir parametrlı integral egri chiziqlar oilasiga har bir nuqtada teguvchi egri chiziq [3, 112-bet]. Aynan shu xususiyat maxsus yechimlarni qidirishning asosiy geometrik g'oyasini tashkil etadi.



Maxsus yechimlarni topishning ikki asosiy analitik metodi mavjud: **p-diskriminant** va **C-diskriminant** metodlari. Bu metodlar bir-birini to'ldiradi va birgalikda ishlatilganda ishonchli natija beradi [4, 203-bet].

p-diskriminant metodi. Tenglama $F(x, y, p) = 0$ (bu yerda $p = y'$) ko'rinishida berilgan bo'lsin. Agar maxsus yechim mavjud bo'lsa, u quyidagi tizimni qondiradi:

$$F(x, y, p) = 0, \quad \partial F / \partial p = 0.$$

Bu tizimdan p ni yo'q qilish orqali p -diskriminant egri chizig'i hosil bo'ladi. Lekin bu egri chiziq har doim ham maxsus yechim bo'lavermaydi — u tac-egri chiziq yoki node-egri chiziq ham bo'lishi mumkin [5, 67-bet].

C-diskriminant metodi. Agar umumiy yechim $\Phi(x, y, C) = 0$ ko'rinishida berilgan bo'lsa, maxsus yechim quyidagi tizimni qondiradi:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \partial \Phi / \partial C = 0.$$

Bu tizimdan C ni yo'q qilish orqali C -diskriminant egri chizig'i topiladi. Ikkala diskriminant metodi natijalarini solishtirish maxsus yechimni aniq aniqlashga imkon beradi [2, 94-bet].

Kler tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$y = x \cdot p + f(p), \quad p = y',$$

bu yerda f — ikki marta differensiallanuvchi funksiya. Bu tenglama Aleksis Klod Kler tomonidan 1734 yilda o'rganilgan bo'lib [1, 38-bet], u matematik tahlilning klassik namunalaridan biri hisoblanadi.

Clairaut tenglamasini x bo'yicha differensiallasak:

$$p = p + x \cdot p' + f'(p) \cdot p', \quad \text{ya'ni} \quad p' \cdot [x + f'(p)] = 0.$$

Birinchi holat: $p' = 0$, ya'ni $p = C = \text{const}$. Bu holda tenglamaning **umumiy yechimi**:

$$y = Cx + f(C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bu to'g'ri chiziqlar oilasi bo'lib, har biri tenglamani qondiradi [6, 178-bet].

Ikkinchi holat: $x + f'(p) = 0$. Bu tenglamani $y = xp + f(p)$ bilan birgalikda parametrik yechsak, maxsus yechim — to'g'ri chiziqlar oilasining ogib o'tuvchisi — topiladi. p -diskriminant metodi yordamida bu ifoda:

$$x = -f'(p), \quad y = -p \cdot f'(p) + f(p).$$

Misol. $y = x \cdot p + p^2$ tenglama uchun. Bu yerda $f(p) = p^2$. Umumiy yechim: $y = Cx + C^2$ — bu parabolani to'g'ri chiziqlar bilan aniqlashtiradi. Maxsus yechim: $x = -2p$, $y = -2p^2 + p^2 = -p^2$, ya'ni $y = -x^2/4$ — bu parabola bo'lib, barcha umumiy yechim to'g'ri chiziqlariga tegadi [7, 56-bet].

Lagranj tenglamasi Kler tenglamasining umumlashmasi hisoblanadi:

$$y = x \cdot g(p) + f(p),$$

bu yerda $g(p) \neq p$. Clairaut tenglamasidan farqli ravishda, Lagrange tenglamasining umumiy yechimi algebraik shaklda berilmaydi, balki parametrik ko'rinishda aniqlanadi [3, 145-bet].

Tenglama x bo'yicha differensiallanadi:

$$p = g(p) + x \cdot g'(p) \cdot p' + f'(p) \cdot p', \quad \text{ya'ni} \quad (p - g(p)) = p' \cdot [x \cdot g'(p) + f'(p)].$$

x ni p funksiyasi sifatida ko'rib, ushbu chiziqli birinchi tartibli tenglama yechiladi. Maxsus yechim esa $p - g(p) = 0$ shartdan, ya'ni $g(p) = p$ ning yechimlaridan topiladi [4, 217-bet].

MUHOKAMA. Maxsus yechimlarning geometrik ma'nosi juda chuqur va intuitiv: ular bir parametrligri egri chiziqlar oilasining og'ib o'tuvchisi hisoblanadi. Og'ib o'tuvchi egri chiziq oilaning har bir a'zosiga tegadi, lekin birorta a'zosi bilan mos tushmaydi [5, 89-bet].

Teorema (Og'ib o'tuvchi va maxsus yechim). Agar $\Phi(x, y, C) = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'lsa va $y = \varphi(x)$ ushbu oilaning og'ib o'tuvchisi bo'lsa, u holda $y = \varphi(x)$ ham tenglamaning yechimi bo'ladi. Biroq teskari isbotlash har doim ham to'g'ri emas: har bir maxsus yechim og'ib o'tuvchi sifatida ifodalanmaydi [6, 195-bet].

Og'ib o'tuvchining muhim xususiyati shuki, har bir nuqtada integral egri chiziq bilan bir xil yo'nalishda — bir xil y' qiymatiga — ega bo'ladi. Aynan shu tufayli og'ib o'tuvchi tenglama o'ng qismini qondiradi. Geometrik jihatdan, Kler tenglamasi uchun to'g'ri chiziqlar oilasi egib o'tuvchi parabolaga oraladi, va bu parabola aynan maxsus yechimni beradi [7, 61-bet].

Koshi-Lipshits teoremasi Koshi masalasining yagona yechimini kafolatlaydi, agar yagona shart — ya'ni $\partial F/\partial y$ ning cheklilik sharti — bajarilsa. Maxsus yechim mavjud bo'lgan holatlarda, aynan shu shart buziladi: maxsus yechim o'tgan nuqtalar orqali ikkita yechim — maxsus yechim va umumiy yechimning tegishli holati — o'tadi [2, 103-bet]. Bu maxsus yechimlarning fundamental nazariy xususiyatidir.

Ushbu holat amaliy jihatdan ham muhimdir: fizik tizimlarni modellashtirish chog'ida maxsus yechimlar bifurkatsiya, faza o'tishi yoki kritik holat kabi muhim hodisalarni tavsiflashi mumkin [3, 158-bet]. Shuningdek, optimal boshqaruv nazariyasida Pontryagin prinsipidan kelib chiquvchi biriktiruvchi tenglamalar ko'pincha Kler yoki Lagranj tipidagi tenglamalar bo'lib, ularning maxsus yechimlari optimal traektoriyalarni beradi.

NATIJA. Amaliyotda maxsus yechimlarni topish uchun quyidagi ketma-ket algoritmi qo'llaniladi [4, 225-bet]:

1-qadam. Tenglamani $F(x, y, p) = 0$ ko'rinishida yozing.

2-qadam. $\partial F/\partial p = 0$ tenglamani yozing.

3-qadam. $F = 0$ va $\partial F/\partial p = 0$ tizimidan p ni chiqarib tashlaymiz — p -diskriminant topiladi.

4-qadam. Umumiy yechim $\Phi(x, y, C) = 0$ mavjud bo'lsa, C -diskriminant ham toping.

5-qadam. Topilgan egri chiziqlarni tenglamaga tekshiring — haqiqiy maxsus yechim ekanligini aniqlang

6-qadam. Urinma chizig'i yoki tugun-egri chiziq ekanligini ham tekshiring.

Misol (to'liq yechish). $(y')^2 - 4y = 0$ tenglama uchun. Bu yerda $F = p^2 - 4y$. $\partial F/\partial p = 2p = 0$, ya'ni $p = 0$. Tenglamaga qo'yilsa: $0 - 4y = 0$, ya'ni $y = 0$ — bu maxsus yechim. Umumiy yechim esa $y = (x - C)^2$ bo'lib, $C = x$ da $y = 0$ ga tegadi

[5, 72-bet]. Geometrik jihatdan $y = 0$ o'qi barcha parabolalar oilasining og'ib o'tuvchisi hisoblanadi.

XULOSA. Ushbu maqolada birinchi tartibli differensial tenglamalar uchun maxsus (singular) yechimlar nazariyasining asosiy jihatlari yoritildi. Quyidagi xulosalar chiqarish mumkin:

Birinchidan, maxsus yechimlar umumiy yechimdan mutlaqo mustaqil bo'lib, ular integral egri chiziqlar oilasining og'ib o'tuvchisi sifatida geometrik talqin qilinadi. Ikkinchidan, ularni topishning ikki asosiy usuli — p-diskriminant va C-diskriminant metodlari — bir-birini to'ldiradi va birgalikda ishonchli natija beradi. Uchinchidan, Kler tenglamasi maxsus yechim nazariyasining eng yorqin namunasi bo'lib, uning maxsus yechimi parametrik ko'rinishda topiladi [1, 42-bet].

Maxsus yechimlar nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham katta ahamiyatga ega: ular optimal boshqaruv, differensial geometriya va fizikaviy tizimlarning kritik holatlarini tavsiflashda muhim rol o'ynaydi [6, 201-bet]. Kelgusida bu sohani n-tartibli differensial tenglamalar va differensial sistemalarga kengaytirish muhim tadqiqot yo'nalishi hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. **Kamke E.** Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959. — 666 b.
2. **Filipov A.F.** Sbornik zadach po differentsialnym uravneniyam. Nauka, Moskva, 1973. — 240 b.
3. **Matveev N.M.** Metody integrirovaniya obyknovennykh differentsialnyh uravneniy. Vysshaya shkola, Moskva, 1967. — 563 b.
4. **Stepanov V.V.** Kurs differentsialnyh uravneniy. GITTL, Moskva, 1958. — 468 b.
5. **Ince E.L.** Ordinary Differential Equations. Dover Publications, New York, 1956. — 558 b.
6. **Tenenbaum M., Pollard H.** Ordinary Differential Equations. Dover Publications, New York, 1963. — 808 b.
7. **Smirnov M.M.** Differentsialnyye uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka. Nauka, Moskva, 1964. — 208 b.
8. **Coddington E.A., Levinson N.** Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, New York, 1955. — 429 b.