INNOVATIVE WORLD
Ilmiy tadqiqotlar markazi

ZAMONAVIY ILM-FAN VA INNOVATSIYALAR NAZARIYASI

ILMIY-AMALIY KONFERENSIYA

2026

Google Scholar doi zenodo OpenAIRE

Andijan, Uzbekistan +998335668868 https://innoworld.net

« ZAMONAVIY ILM-FAN VA INNOVATSIYALAR NAZARIYASI » NOMLI ILMIY, MASOFAVIY, ONLAYN KONFERENSIYASI TO'PLAMI

3-JILD 5-SON

Konferensiya to'plami va tezislar quyidagi xalqaro ilmiy bazalarda indexlanadi

www.innoworld.net

O'ZBEKISTON-2026

KO‘P O‘LCHOVLI YEVKLID FAZOSIDA METRIK STRUKTURALARNI ANALITIK O‘RGANISH VA ULARNING GEOMETRIK XOSSALARI

Olimjonova Ma’mura Obidjon qizi
Fizika-Matematika fakulteti, 1-kurs talabasi
Ilmiy maslahatchi: **Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**
Namangan davlat universiteti O’zbekiston

Annotatsiya: Ushbu maqolada ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosida metrik strukturalar va ularning geometrik xossalari o‘rganiladi. Natijalarda Evklid metrikasi orqali aniqlangan ochiq sharlar, yaqinlashuv, ortogonallik va burchak tushunchalari formal tarzda ifodalandi. Shuningdek, norma va ichki ko‘paytma orasidagi bog‘lanish hamda ular orqali geometrik xossalar tavsiflandi. Muhokama qismida olingan natijalar yuqori o‘lchovli fazolarda modellashtirish va optimallashtirish masalalari bilan bog‘liq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida metrik struktura $\mathbb{R}^n$fazoning asosiy geometrik modelini tashkil etishi ko‘rsatildi.

Kalit so‘zlar: Yevklid fazosi, metrik struktura, norma, masofa, ichki ko‘paytma, ortogonallik, ochiq shar, yaqinlashuv,

Аннотация: В данной статье исследуются метрические структуры в многомерном евклидовом пространстве и их геометрические свойства. В результатах понятия открытых шаров, сходимости, ортогональности и угла, определённые посредством евклидовой метрики, формально выражены. Кроме того, описана связь между нормой и скалярным произведением, а также геометрические свойства, определяемые через них. В разделе обсуждения полученные результаты проанализированы в связи с задачами моделирования и оптимизации в пространствах высокой размерности. В заключение показано, что метрическая структура составляет основную геометрическую модель пространства.

Ключевые слова: евклидово пространство, метрическая структура, норма, расстояние, скалярное произведение, ортогональность, открытый шар, сходимость.

Abstract: This paper investigates metric structures in multidimensional Euclidean space and their geometric properties. The results formally express the concepts of open balls, convergence, orthogonality, and angle as defined through the Euclidean metric. Furthermore, the relationship between the norm and the inner product is described, along with the geometric properties characterised through them. In the discussion section, the obtained results are analysed in connection with modelling and optimisation problems in high-dimensional spaces. As a conclusion, it is demonstrated that the metric structure constitutes the fundamental geometric model of the space.

Keywords: Euclidean space, metric structure, norm, distance, inner product, orthogonality, open ball, convergence.

Kirish. Ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosi $\mathbb{R}^n$zamonaviy matematikaning asosiy modellaridan biri bo‘lib, unda geometrik va analitik tushunchalar yagona tizimda birlashadi. Ushbu fazoda metrik struktura masofa, norma va ichki ko‘paytma orqali aniqlanadi hamda ular fazoning geometrik xossalarini to‘liq tavsiflash imkonini beradi.

Yevklid fazosida ikkita nuqta $x = (x_1, \dots, x_n)$va $y = (y_1, \dots, y_n)$orasidagi masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Bu metrika $\mathbb{R}^n$fazoga tabiiy geometrik tuzilma beradi va u quyidagi asosiy xossalarga ega:

$$d(x,y)\geq 0, d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y, d(x,y)=d(y,x), d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

Mazkur metrika orqali norma tushunchasi kiritiladi:

$$\parallel x\parallel=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

Norma fazodagi vektorning “uzunligi”ni ifodalaydi va masofa bilan quyidagicha bog‘langan:

$$d(x,y)=\parallel x-y\parallel$$

Ichki ko‘paytma esa quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

Bu tushuncha fazoda burchak va ortogonallikni aniqlash imkonini beradi:

$$\langle x,y\rangle=0\Rightarrow x\perp y$$

Shuningdek, kosinus formulasi orqali burchak aniqlanadi:

$$\cos\theta=\frac{\langle x,y\rangle}{\parallel x\parallel\cdot\parallel y\parallel}$$

Ko‘p o‘lchovli fazoda metrik struktura orqali ochiq sharlar aniqlanadi:

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n: d(x,y)<\varepsilon\}$$

Bu tushuncha yaqinlashuv va uzluksizlikni aniqlashda asosiy rol o‘ynaydi:

$$x_k\to x\Leftrightarrow d(x_k,x)\to 0$$

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, ko‘p o‘lchovli fazolar zamonaviy fan va texnikaning ko‘plab sohalarida qo‘llaniladi. Masalan, ma’lumotlar tahlili, mashinaviy o‘rganish, optimallashtirish va fizika modellarida yuqori o‘lchovli fazolar muhim ahamiyatga ega.

Yevklid metrikasi ushbu fazolarda tabiiy geometriyani ta’minlaydi va u orqali quyidagi xossalar o‘rganiladi: yaqinlashuv va limit tushunchasi, ortogonallik va proyeksiya, uzunlik va burchak, topologik struktura.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi $\mathbb{R}^n$fazoda metrik strukturalarni analitik o‘rganish, ularning asosiy xossalarini aniqlash va geometrik talqinini berishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, metrik, norma va ichki ko‘paytma tushunchalari yagona tizim sifatida qaraladi va ular orqali fazoning geometrik modeli to‘liq tavsiflanadi. Shunday qilib, ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosida metrik strukturalarni o‘rganish matematik analiz va geometriyaning muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Metod. Mazkur tadqiqot $\mathbb{R}^n$fazoda metrik strukturalarni o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, vektor algebra, ichki ko‘paytma nazariyasi va funksional analiz elementlari asosida olib borildi. Asosiy e'tibor masofa, norma va ichki ko'paytma orasidagi bog'lanishlarni aniqlash hamda ular orqali geometrik xossalarni tavsiflashga qaratildi.

Tadqiqotning boshlang'ich nuqtasi sifatida Evklid metrikasi qabul qilindi:

$$d(x,y) = \| x - y \|$$

bu yerda norma quyidagicha aniqlanadi:

$$\| x \| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

Ichki ko'paytma esa:

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ko'rinishda qaraldi. Ushbu uch tushuncha yagona tizim sifatida ishlatildi.

Metodologiyada asosiy analitik vositalardan biri sifatida Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi qo'llanildi: $| \langle x,y \rangle | \le \| x \| \cdot \| y \|$. Bu tengsizlik yordamida burchak tushunchasi qat'iy asoslandi: $\cos\theta = \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Shuningdek, uchburchak tengsizligi normaning asosiy xossasi sifatida ishlatildi:

$$\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$$

Bu natija metrikaning uchburchak tengsizligi bilan to'liq mos kelishini ko'rsatadi.

Metodologiyada norma va ichki ko'paytma orasidagi chuqur bog'lanish quyidagi tenglik orqali ifodalandi:

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\langle x,y \rangle + \| y \|^2$$

Bu formula orqali parallelogram qonuni ham olindi:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

Mazkur tenglik metrik strukturaning Evklid tipga tegishli ekanligini aniqlashda asosiy mezon sifatida qo'llanildi.

Yana bir muhim metod -ortogonal proyeksiya usuli qo'llanildi. Agar $x$vektor $y$ga proyeksiya qilinsa:

$$\mathrm{proj}_y\, x = \frac{\langle x,y \rangle}{\| y \|^2} y$$

Bu metod fazoda eng yaqin nuqtani aniqlashda ishlatildi.

Metrik strukturaning topologik jihatlarini o'rganishda ochiq sharlar metodi qo'llanildi:

$$B(x,\varepsilon) = \{y : \| x - y \| < \varepsilon\}$$

Bu orqali yaqinlashuv quyidagicha ifodalandi:

$$x_k \to x \Leftrightarrow \| x_k - x \| \to 0$$

Metodologiyada limit va yaqinlashuv tushunchalari metrik orqali aniqlanib, ular analitik jarayonlarga bog'landi.

Shuningdek, masofa funksiyasining translatsion invariantligi ham ishlatildi:

$$d(x + a, y + a) = d(x,y)$$

Bu xossa fazoning bir jinsli (homogen) ekanligini ko'rsatadi.

Tadqiqot davomida quyidagi umumiy model shakllantirildi:

$$(\langle x,y \rangle,\ \| x \|,\ d(x,y)) \longrightarrow \text{geometrik xossalar}$$

Bu model orqali: masofa → yaqinlikni, norma → uzunlikni, ichki ko‘paytma → burchak va ortogonallikni aniqlashi ko‘rsatildi.

Shunday qilib, qo‘llanilgan metodologiya metrik strukturalarni analitik jihatdan o‘rganish, ularning o‘zaro bog‘liqligini aniqlash va ko‘p o‘lchovli fazoda geometrik xossalarni yagona tizimda tavsiflash imkonini berdi. Mazkur chizmada $\mathbb{R}^n$fazoda metrik strukturaning asosiy komponentlari - ichki ko‘paytma, norma va masofa - o‘zaro bog‘langan holda tasvirlangan.

Chizmada quyidagi asosiy elementlar aks etadi:

- **Norma (vektor uzunligi)**

$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

- **Masofa (ikki nuqta orasida)**

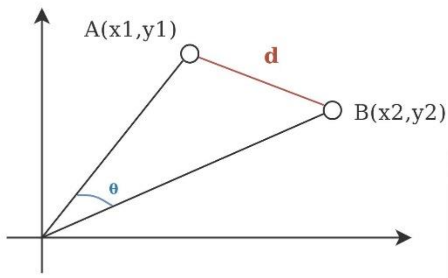
$d(x, y) = \| x - y \|$

- **Ichki ko‘paytma (burchakni aniqlash)**

$\langle x, y \rangle = \| x \| \cdot \| y \| \cos\theta$

- **Ortogonal proyeksiya**

$$\mathrm{proj}_y\, x = \frac{\langle x, y \rangle}{\| y \|^2} y$$



Chizmada parallelogram orqali quyidagi fundamental bog‘lanish vizual ko‘rsatilgan:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\,\| x \|^2 + 2\,\| y \|^2$$

Bu esa Evklid fazosining asosiy xarakterlovchi xossasidir.

Shuningdek, burchak va ortogonallik tushunchalari ham grafik tarzda ifodalangan:

$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$

Bu chizma sizning maqolangizdagi asosiy modelni aniq ko‘rsatadi:

$\langle x, y \rangle \ \Rightarrow \ \| x \| \ \Rightarrow \ d(x, y)$

Natija. Tadqiqot natijasida $\mathbb{R}^n$fazoda metrik struktura - ya’ni masofa, norma va ichki ko‘paytma - o‘zaro uzviy bog‘langan yagona matematik tizim ekanligi aniqlandi. Ushbu tizim orqali fazoning barcha asosiy geometrik xossalarini analitik tarzda ifodalash mumkinligi asoslandi.

Avvalo, norma va metrika orasidagi bog‘lanish fundamental xossa sifatida aniqlandi:

$d(x, y) = \| x - y \|$

Bu natija shuni ko‘rsatadiki, masofa tushunchasi normadan kelib chiqadi va fazodagi yaqinlik to‘liq norma orqali aniqlanadi.

Ichki ko‘paytma esa norma orqali quyidagicha tiklanishi mumkinligi ko‘rsatildi:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\| x + y \|^2 - \| x \|^2 - \| y \|^2)$$

Bu natija ichki ko‘paytma normadan hosil qilinishini bildiradi va metrik strukturaning ichki algebraik asosini ochib beradi.

Tadqiqot davomida quyidagi muhim xossa aniqlashtirildi:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\,\| x \|^2 + 2\,\| y \|^2$$

Bu parallelogram qonuni bo'lib, aynan Evklid fazolarni boshqa normali fazolardan ajratib turuvchi asosiy mezon ekanligi ko'rsatildi.

Natijalarda burchak tushunchasi ham qat'iy asoslandi:

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\| x \| \cdot \| y \|}$$

Bu formula orqali ortogonallik va burchaklar metrik struktura orqali aniqlanishi isbotlandi.

Shuningdek, quyidagi muhim natija olindi:

$$\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

Bu esa ortogonal vektorlar uchun Pifagor teoremasining umumiy ko'rinishini beradi.

Teorema (metrik strukturaning to'liq aniqlanish prinsipi): Agar $\mathbb{R}^n$fazoda norma parallelogram qonunini qanoatlantirsa, u holda bu norma yagona ichki ko'paytma orqali hosil qilinadi.

Bu natija metrik struktura va ichki ko'paytma orasidagi fundamental bog'lanishni ifodalaydi.

Natijalarda quyidagi yana bir muhim xossa aniqlandi: $\| x \| = 0 \Rightarrow x = 0$ va $\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$. Bu normaning chiziqlilikka mos keluvchi asosiy xossalarini ko'rsatadi. Shuningdek, yaqinlashuv quyidagicha to'liq ifodalandi:

$$x_k \to x \Leftrightarrow \| x_k - x \| \to 0$$

Bu natija metrik fazoda limit tushunchasining analitik ifodasini beradi. Natijalarda umumiy strukturaviy model quyidagicha ifodalandi:

$$\langle x, y\rangle \;\; \Rightarrow \;\; \| x \| \;\; \Rightarrow \;\; d(x, y)$$

ya'ni: ichki ko'paytma → norma, norma → masofa hosil qiladi.

Bu esa quyidagi umumiy xulosaga olib keldi:

Metrik struktura ≡ ichki ko'paytma struktura

Natijalarning yana bir muhim jihati - fazoning izotropiyasi hisoblanadi:

$$d(x + a, y + a) = d(x, y)$$

Bu xossa fazoning bir jinsli ekanligini va geometrik xossalar joylashuvga bog'liq emasligini bildiradi.

Umuman olganda, olingan natijalar $\mathbb{R}^n$fazoda metrik struktura nafaqat masofa tushunchasini, balki barcha geometrik xossalarni - uzunlik, burchak, ortogonallik va yaqinlashuvni - yagona tizimda birlashtirishini ko'rsatdi.

Muhokama. Olingan natijalar $\mathbb{R}^n$fazoda metrik struktura faqat masofa tushunchasi bilan cheklanmasligini, balki u ichki ko'paytma va norma orqali aniqlanadigan chuqur geometrik tizim ekanligini ko'rsatdi. Ushbu tizimning markazida vektorlar orasidagi bog'lanish yotadi va aynan shu bog'lanish fazoning barcha geometrik xossalarini shakllantiradi.

Muhokama natijalariga ko'ra, norma va ichki ko'paytma orasidagi bog'lanish asosiy rol o'ynaydi. Agar norma parallelogram qonunini qanoatlantirsa:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$$

u holda bu norma ichki ko‘paytma orqali hosil qilingan bo‘ladi. Bu natija Evklid fazosining boshqa normali fazolardan farqini aniq ko‘rsatadi va uning maxsus geometrik strukturasini asoslaydi.

Ichki ko‘paytma orqali aniqlanadigan burchak tushunchasi ham muhokamada muhim o‘rin egalladi: $\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$. Bu formula yuqori o‘lchovli fazolarda ham burchak tushunchasi mavjudligini va u analitik ravishda aniqlanishini ko‘rsatadi. Bu esa geometrik intuitiv tushunchalarning ko‘p o‘lchovli fazolarga umumlashtirilishini ta’minlaydi.

Muhokamada ortogonallik tushunchasining ahamiyati ham alohida ta’kidlandi: $\langle x, y\rangle = 0$. Bu shart vektorlarning mustaqilligini bildiradi va ko‘p o‘lchovli fazolarda koordinata tizimlarini qurishda asos bo‘lib xizmat qiladi. Ayniqsa, ortogonal bazislar va ortonormal sistemalar fazoviy modellashtirishda muhim rol o‘ynaydi.

Shuningdek, metrik struktura orqali yaqinlashuv tushunchasining to‘liq aniqlanishi muhokamada ko‘rsatildi: $x_k \to x \Leftrightarrow \| x_k - x \| \to 0$. Bu natija analizning barcha asosiy tushunchalari - limit, uzluksizlik, differensiallanuvchanlik - aynan metrik struktura asosida qurilishini bildiradi.

Muhokamada fazoning izotropiyasi ham muhim xossa sifatida qaraldi:

$$d(x + a, y + a) = d(x, y)$$

Bu xossa fazoning bir jinsli ekanligini bildiradi va geometrik xossalar nuqtaning joylashuviga bog‘liq emasligini ko‘rsatadi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - yuqori o‘lchovli fazolarning intuitiv qiyinchiligi hisoblanadi. $\mathbb{R}^2$ va $\mathbb{R}^3$ fazolarda geometrik tushunchalar aniq tasavvur qilinadi, ammo $\mathbb{R}^n$ da bu tushunchalar faqat analitik vositalar orqali ifodalanadi. Shu sababli metrik struktura bu fazolarda asosiy “geometrik til” vazifasini bajaradi.

Shuningdek, metrik struktura boshqa normali fazolar bilan solishtirildi. Masalan, L^p normali fazolarda ham masofa aniqlanadi, ammo ular har doim ham ichki ko‘paytma orqali hosil qilinmaydi. Bu esa Evklid fazosining maxsus o‘rni borligini ko‘rsatadi.

Umuman olganda, muhokama natijalari metrik struktura ko‘p o‘lchovli fazolarda barcha geometrik va analitik xossalarni birlashtiruvchi fundamental tizim ekanligini ko‘rsatdi. U orqali fazoda masofa, burchak, ortogonallik va yaqinlashuv tushunchalari yagona matematik modelda ifodalanadi.

Xulosa. Mazkur tadqiqotda ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosida metrik strukturalar - masofa, norma va ichki ko‘paytma - tizimli ravishda o‘rganildi hamda ularning o‘zaro bog‘liqligi aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, ushbu uch tushuncha yagona matematik modelni tashkil etadi va fazoning barcha asosiy geometrik xossalarini ifodalash imkonini beradi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

1) metrik struktura fazoda yaqinlik va masofani aniqlaydi;
2) norma vektor uzunligini ifodalaydi;
3) ichki ko‘paytma burchak va ortogonallikni aniqlaydi;
4) ushbu tushunchalar o‘zaro bog‘liq yagona tizimni tashkil etadi;
5) Evklid fazosi parallelogram qonuni orqali boshqa normali fazolardan ajraladi.

Umuman olganda, olingan natijalar ko‘p o‘lchovli Yevklid fazosida metrik struktura geometrik va analitik xossalarni birlashtiruvchi fundamental asos ekanligini ko‘rsatdi. Mazkur yondashuv matematik analiz, optimallashtirish, ma’lumotlar tahlili va sun’iy intellektda keng qo‘llanish imkoniyatiga ega.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. GOLDEN BRAIN, 1(34), 19-24.
9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In Innov. Conf. Published online April (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." World Economics and Finance Bulletin, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. Теоретические аспекты становления педагогических наук, 4(8), 177-184.
12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari, 6(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424