BUXORO DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI (BUXORO TABIIY RESURSLARNI BOSHQARISH INSTITUTI) (O‘ZBEKISTON),

BIRLASHGAN MILLATLAR TASHKILOTINING “QISHLOQ XO‘JALIGI VA OZIQ OVQAT” TASHKILOTI (FAO),

GUMBOLT NOMIDAGI BERLIN UNIVERSITETI (GERMANIYA),

PRESOV UNIVERSITETI (SLOVAKIYA),

VALENSIYA POLITEXNIKA UNIVERSITETI (ISPANIYA),

ZALF AGROTEXNOLOGIYALAR ILMIY TADQIQOT MARKAZI (GERMANIYA),

INTI XALQARO UNIVERSITETI (MALAYZIYA),

HERRIOT WATT UNIVERSITETI (MALAYZIYA)

“YASHIL ENERGETIKA VA UNING QISHLOQ VA SUV XO’JALIGIDAGI O’RNI” MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY VA ILMIY-TEXNIKAVIY ANJUMANI

MATERIALLAR TO‘PLAMI

29-30-aprel, 2025-yil

ISSN: 978-9910-10-082-6
UO‘K 556.182:551.5(08)
BBK 26.222+26.236
«DURDONA» Nashriyoti

“Yashil energetika va uning qishloq va suv xo’jaligidagi o’rni” mavzusidagi xalqaro ilmiy va ilmiy-texnikaviy anjumani materiallar to‘plami (2025-yil 29-30-aprel) -B.: Buxoro davlat texnika universiteti (Buxoro tabiiy resurslarni boshqarish instituti), 2025.

To‘plamga kiritilgan tezislardagi ma’lumotlarning haqqoniyligi va iqtiboslarning tog‘riligiga mualliflar mas’uldir.

Elektron pochta manzili: buxtimi@mail.ru

УДК518:517.944/947

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ.

Хамраев Ю. Ю.
Бухарского государственного технического университета. E-mail: yunushamroyev1952@gmail.com

Абстрактный. *Рассматривается точные и усеченные разностные схемы m-го ранга. Доказывается, что при непрерывности по Гельдеру матричных коэффициентов и правой части исходной краевой задачи усеченные схемы m-го ранга имеют точность O($h^{m+\mu}$) в специальной весовой норме.*

Ключевые слова. *Разностная схема, усеченная разностная схема , точная схема, шаблон, сетка, пространство , аналог , точность.*

Annotation. *This paper, we consider exact and truncated difference schemes of the m-th rank for systems of ordinary differential equations of the second order.*

The convergence rate of truncated schemes of rank m-th is proved.

Keywords: *difference scheme, truncated difference scheme, exact scheme, template, grid, space, analog, accuracy.*

Аннотация. *Мақолада аниқ ва m-рангли «қирқилган» айирмали схемалар ўрганилган. Дифференциал масаланинг матрицавий коэффициентлари ва ўнг қисми Гельдер бўйича узлуксиз бўлганда, m-рангли қирқилган айирмали схема махсус вазнли нормада O($h^{m+\mu}$) аниқликка эга эканлиги исботланган.*

Таянч иборалар: *Айирмали схемалар, «қирқилган» айирмали схема, аниқ айирмали схема, қолип, тўр, фазо, ўхшатма, аниқлик.*

Введение. Приближенное решения краевых задач с особенностью разностным методом вызывает ряд трудностей по сравнению с решением таких задач без особенности. Решением краевых задач с разностными методами занимались такие знаменитые ученые как А.А. Самарский, А. Н. Тихонов, С. К. Годунов, Н.Н. Яненко, А. В. Гулин, В. Б. Андреев, П.И. Монастырный, В. Г. Приказчиков, В. Л. Макаров и другие.

Среди разностных схем особое место занимает так называемые точные схемы, впервые разработанные А.А. Самарским и А. Н. Тихоновым. (см, [3]).

При построении обычных разностных схем путем замены дифференциалов разностными выражениями от искомого решения задачи потребуется более высокая гладкость, чем которая требуется для существования и единственности решения исходной дифференциальной задачи.

Методика построения точных трехточечных разностных схем такова, что она существует и единственна при тех же требованиях, при которых существует и единственна решение исходной дифференциальной задачи. Кроме этого, точные разностные схемы сохраняют все “хорошие” качества (консервативность, самосопряженность) исходной дифференциальной задачи.

Краевые задачи с особенностью часто возникают при решении задач фильтрации в неоднородных средах (см, [6]) и задач теории оболочек переменной толщины.

Теория точных разностных схем дальнейшее свое развитие получила в работах представителей математической школы, возглавляемой профессором В. Л. Макаровым в Киевском государственном университете им. Т. Г. Шевченко.

Численное решение краевых задач с вырождением вызывает значительные трудности связанные с понижением скорости сходимости приближенного решения к точному по сравнению с регулярным случаем (см например [5]).

Постановка задачи. В связи с этим актуальной задачей является разработка численных методов высокого порядка точности для указанного класса задач, позволяющих получать удовлетворительные решения на достаточно грубых сетках. Этому требованию удовлетворяют точные и усеченные разностные схемы, которые были построены и исследованы в работе [2] для самосопряженной краевой задачи с вырождением в случае векторной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В настоящем сообщении результаты работы [2] переносятся на несамосопряженный случай.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L^{(P,Q)}\vec{u} \equiv ((1-x^2)P(x)\vec{u}\,')'-Q(x)\vec{u}=-\vec{f}(x)\,,\ -1<x<1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\|\vec{u}\,(\pm1)\|<\infty \qquad \textbf{(2)}$$

где $P(x)=[p_{ij}\ (x)]$, $Q(x)=[q_{ij}(x)]$ $(i,\ j=\overline{1,n})$ квадратные, вещественные матрицы размерности nxn, $\vec{f}(x)$- заданная а $\vec{u}(x)$- искомая n-мерные вектор – функции .

Будем предполагать что матрицы P(x), Q(x) и вектор $\vec{f}(x)$ удовлетворяют следующим условиям А:

$$C_1E\leq P(x)\leq C_2E,\ C_3E\leq Q(x)\leq C_4E,$$

$$\text{где } P(x)\geq CE \Leftrightarrow (P(x)\vec{y},\vec{y})\geq C(\vec{y},\vec{y}),\ \forall\ \vec{y}\in E^n,\ x\in[-1,1]$$

(•,•)- скалярное произведение в E^n, Е-единичная матрица в E^n .

1) Матрицы P(x), Q(x) являюся непрерывными по Гельдеру, т.е.

$\|P(x)-P(y)\|\leq C|x-y|^{\mu}$, $\|Q(x)-Q(y)\|\leq C|x-y|^{\mu}$,

$x,y\in[-1,1]$, ||•||-произвольная матричная норма в E^n , $0<\mu\leq1$.

$$f_2(x)\in W_2^{-1}[-1;1]\,,\ i=\overline{1,n}$$

где $\vec{f}(x)=(f_1(x)\ f_2(x),\ \dots\ ,f_n(x))^T$.

Пусть V [-1;1] – гильбертово пространство (см, [2]) вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}\,,\vec{v})_{V[-1,+1]}=\int_{-1}^{1}\left(\left(1-x^2\right)\left((\vec{u}\,',\vec{v'}\right)+(\vec{u}\,,\vec{v}\,)\right)dx$$

Используя известные результаты по разрешимости краевых задач (см, например, [4]), нетрудно показать, что выполнение условий А гарантирует существование и единственность решения задачи (1), (2) в пространстве V[-1;1]

Метод решения. Пусть $\omega_h=\{x_i=x_0+ih,\ x_0=-1\ ,\ x_n=1,\ i=\overline{1,N}\ ,\ h=2/N\ \}$ равномерная сетка на отрезке [-1;1]

Введем шаблонные матричные функции $V_1^i(x)$, $V_2^i(x)$, которые являются решениями следующих матричных задач Коши :

$$(V_j^i{}'(x)(1-x^2)P(x))'-V_j^i(x)Q(x)=\Theta\ ;\ j=1,2\ ,\ x_{i-1}<x<x_{i+1}$$

$$V_1^i(x_{i-1})=\delta_{i,1}E\ ,\ V_2^i(x_{i+1})=\delta_{i,N-1}E\ ,\ i=\overline{1,N-1}$$

$$V_1^i{}'(x)(1-x^2)P(x)\,\Big|\,x_{i-1}\ =(1-\delta_{i,1})E\ ,$$

$$V_2^i{}'(x)(1-x^2)P(x)\,\Big|\,x_{i+1}\ =(\delta_{i,N-1}-1)E\ ,$$

где Θ-нуль-матрица в простратстве E_n;

$\delta_{i,1}$- символ Кронекера.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполнены условия А, тогда шаблонные матричные функции $V_j^i(x)$, j=1,2 обладают свойствами:

а) $V_j^i(x)$-линейно независимы [1] ,

б) $V_j^i(x)$ невырожденные, т.е.

$\det V_j^i(x)\neq0,\ \forall\ x\in(x_{i-1},\ x_{i+1})\ ,\ i=\overline{1,N}\,,j=1,2$.

доказательство леммы аналогично доказательству подобной леммы для самосопряженной задачи (см, [2])

ведем матричную функцию Грина $G_1^i(x,\ y)$ оператора $L^{(P,Q)}$ на отрезке $[x_{i-1},\ x_{i+1}]$, которая является решением следующей задачи :

$$(G_1^{i'}(x,y)(1-y^2)P(y))'-G_1^i(x,y)Q(y)=\Theta,\ y,x\in(x_{i-1},\ x_{i+1})$$

$$G_1^i(x,\ x_{i-1})=G_1^i(x,x_{i+1})=\Theta,\ \|\ G_1^i(x;-1)\|<\infty\ ,$$

$$\|\ G_1^{N-1}(x;1)\|<\infty\ ,\ i=\overline{2,N-2}$$

$$G_1^i(x,y)_{y=x}=\Theta,\ G_1^i(x,y)(1-y^2)P(y)_{y=x}=-E,$$

$$\text{Где } [G_1^i(x,y)]_{x=y}=G_1^i(x,x+0)-G_1^i(x,x-0)\ ,$$

Θ- нуль матрица.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (3), (4), тогда матричная функция Грина $G_1^i(x,\xi)$ оператора $L^{(P,Q)}$ существует и имеет вид :

$$G_1^i(x,\xi) = -\begin{cases} k_i^{-1}(x)\,[V_1^{-i}(x)]^{-1}\;V_1^{-i}(\xi), \xi \le x\,, \\ k_i^{-1}(x)[V_2^{-i}(x)]^{-1}V_2^{-i}(\xi), \xi \ge x\,, \end{cases}$$

Здесь

$$k_i(x)= [V_2^{-i}(x)]^{-1}(1-\delta_{i,N-1})E- \int_x^{x_{i+1}} V_2^i(x)Q(x)dx)- [V_1^{-i}(x)]^{-1}((1-\delta_{i_1})E-\int_{x_{i-1}}^{x} V_1^i(x)Q(x)dx)\,.$$

Способ построения $G_1^i(x,\xi)$ аналогичен самосопряженнему случаю (см,[2]).

Умножим уравнение (1) слева на функцию Грина $G_1^i(\xi, x)$ интегрируем по x от x_{i-1} до x_{i+1} и после несложных преобразований получим следующую разностную схему, которая по построению является точной:

$$[V_2^{-i}(x_i)]^{-1}(\vec{u}_{i+1}-\vec{u}_i)- [V_1^{-i}(x)]^{-1}(\vec{u}_i-\vec{u}_{i+1})-$$
$$\left\{ [V_1^i(x_i)]^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x} V_1^i(\eta)\,Q(\eta)d\eta+ [V_2^i(x)]^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^i(\eta)\,Q(\eta)d\eta\right\}\bullet\vec{u}_i=[V_1^i(x_i)]^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x} V_1^i(\eta)\,\vec{f}(\eta)d\eta$$
$$+[V_2^i(x)]^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^i(\eta)\,\vec{f}(\eta)d\eta\,;\; i=\overline{1,N-1},\ \|\vec{u}_0\|<\infty\,;\ \|\vec{u}_N\|<\infty\,;$$
$$[h^{-1}V_2^{N-1}(x_{N-1})]^{-1}=[h^{-1}V_1^1(x_1)]^{-1}=\Theta$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть выполнены условия А, тогда точная трехточечная разностная схема для задачи (1), (2) существует , единственна и имеет вид :

$$(A\overrightarrow{u_{\bar{x}}})_{x,i}-D_i\vec{u}_i+\frac{1}{h}(A_i-B_i)\overrightarrow{u_{\bar{x},i}}=-\vec{F}_i\,,\ i:= \overline{1,N-1}\ \textbf{(3)}$$
$$\|\vec{u}_0\|<\infty; \qquad \|\vec{u}_N\|<\infty$$

где $A_{i+1}=[h^{-1}V_2^i(x_i)]^{-1}$, $B_i=[h^{-1}V_1^i(x_i)]^{-1}$, $B_1=A_N=\Theta$, $D_i=T_i(Q)$, $\vec{F}_i=T_i(\vec{f})$

$$T_i(W)=h^{-1}([V_1^i(x_i)]^{-1}\int_{x-1}^{x_i} V_1^i(y)W(y)dy+ [V_2^i(x_i)]^{-1}\int_{x}^{x_{i+1}} V_2^i(y)W(y)dy)$$

Существование ТТРС доказано ранее, причем конструктивно а единственность ТТРС (6) доказывается как в самосопряженном случае (см, [3])

Следую методике работ [2,6], проведем построение усеченных разностных схем (УРС) m-го ранга. Введем в отрезке $[x_{i-1},x_{i+1}]$ локальную систему координат по формуле $x=x_i+sh$

Положим по определению

$$V_1^i(x)=\begin{cases} \alpha^1(s,h)\text{ при } i=1, \\ h\,б^i(s,h)\text{ при } i=\overline{2,N-1}. \end{cases}$$
$$V_2^i(x)=\begin{cases} h\,\beta^i(s,h)\text{ при } i=\overline{1,N-2}\,, \\ \beta^{N-1}(s,h)\text{ при } i=N-1\,. \end{cases}$$

Подставляя эти выражений в матричные задачи Коши получим соответствующие задачи для $\alpha^i(s,h)$, $\beta^i(s,h)$, решения которых будем искать в виде (см, [6])

$$\alpha^i(s,h)=\sum_{k=0}^{\infty} h^{2k}\alpha_k^i(s)\,,\ \beta^i(s,h)=\sum_{k=0}^{\infty} h^{2k}\beta_k^i(s)\ \textbf{(7)}$$

Здесь матрицы $\alpha_k^i(s)$, $\beta_k^i(s)$ определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_{k+1}^i(s) = \int_{-1}^{s}\int_{-1}^{\xi}\alpha_k^i(\eta)\,\widetilde{Q}(\eta)\widetilde{P}_1^{-1}(\xi)d\eta d\xi\,,\ \alpha_0^i(s)\equiv E\,,$$
$$\alpha_0^i(s)=\int_{-1}^{S}\widetilde{P}_1^{-1}(\eta)d\eta\,;\ i=\overline{2,N-1}\,,\ \textbf{(8)}$$
$$\beta_{k+1}^i(s)=\int_s^1\int_\xi^1\beta_k^i(\eta)\widetilde{Q}(\eta)\widetilde{P}_1^{-1}(\xi)d\eta d\xi\,,\ \beta_0^{N-1}(s)\equiv E\,,$$
$$\beta_0^i(s)=\int_S^1\widetilde{P}_1^{-1}(\eta)d\eta\,;\ i=\overline{1,N-2}\,,\ k=1,2,$$

где

$$\widetilde{W}(s)=W(x_i+sh)\,,\ \widetilde{P}_1(\xi)=(1-(x_i+\xi h)^2)\widetilde{P}(s)$$

Можно доказать, что условие (3) гарантирует равномерную сходимость рядов (7) к решению задач Коши для $\alpha^i(s,h)$ и $\beta^i(s,h)$. В терминах матриц $\alpha^i(s, h)$, $\beta^i(s, h)$ ТТРС (6) запишем в виде

$$(A\vec{u}_{\bar{x}})_{x,i}-D_i\vec{u}_i+\frac{1}{h}(A_i-B_i)\vec{u}_{\bar{x},i} =-\vec{\Phi}_i\,,\ i=\overline{1,N-1}$$
$$\|\vec{u}_0\|<\infty\,,\ \|\vec{u}_N\|<\infty\ \textbf{(9)}$$

где $B_1=A_N=\Theta$, $A_{i+1}=[\beta^i(0,h)]^{-1}$, $B_i=[\alpha^i(0,h)]^{-1}$

$D_i=T^i(Q)$, $\vec{\Phi}_i=T^i(\vec{f})$,

$T^i(W)=[\alpha^i(0,h)]^{-1}\int_{-1}^{0}\alpha^i(\xi,h)\widetilde{W}(\xi)d\xi+[\beta^i(0,h)]^{-1}\int_0^1\beta^i(\xi,h)\widetilde{W}(\xi)d\xi$.

Если в суммах (7) ограничимся m-слагаемыми т.е. вместо $\alpha^i(s,h)$, $\beta^i(s,h)$ возьмем матричные полиномы 2m-й степени по h:

$\alpha^m(s,h)=\sum_{k=0}^{m}h^{2k}\alpha_k^i(s)$, $\beta^m(s,h)=\sum_{k=0}^{m}h^{2k}\beta_k^i(s)$

и подставляя их в ТТРС (9) вместо $\alpha^i(s,h)$, $\beta^i(s,h)$ то получим разностную схему вида

$(A^m\vec{y}_{\bar{x}})_{x,i}-D_i\vec{y}_i+\frac{1}{h}(A_i^m-B_i^m)\vec{y}_{\bar{x},i}=-\vec{\Phi}_i^m$, $i=\overline{1,N-1}$

$\|\vec{y}_0\|<\infty$, $\|y_N\|<\infty$ **(10)**

где $B_1^m=A_N^m=\Theta$, $A_{i+1}^m=[\beta^m(0,h)]^{-1}$, $B_i^m=[\alpha^m(0,h)]^{-1}$

$D_i^m=T_i^m(Q)$, $\vec{\Phi}_i^m=T_i^m(\vec{f})$,

$T_i^m(W)=[\alpha^m(0,h)]^{-1}\int_{-1}^{0}\alpha^m(s,h)\widetilde{W}(s)ds+[\beta^m(0,h)]^{-1}\int_0^1\beta^m(s,h)\widetilde{W}(s)ds$,

которая по определению (см,[3]) является УРС m-го ранга.

Справедлива следующая.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (3), (4), тогда при достаточно малом h нормы матриц $\alpha(s,h)$, $\alpha^m(s,h)$ удовлетворяют следующим неравенствам

$$C_5(1-x_{e_1}^2)^{-1}\le\left\|\alpha^i(s,h)\right\|_1\le C_6(1-x_e^2)^{-1},$$
$$C_5(1-x_{e_1}^2)^{-1}\le\|\alpha^m(s,h)\|_1\le C_6(1-x_e^2)^{-1}, \quad \textbf{(11)}$$
$$C_7(1-x_e^2)^{-1}\le\left\|[\alpha^i(0,h)]^{-1}\right\|_1\le C_8(1-x_e^2),$$
$$C_7(1-x_e^2)^{-1}\le\|[\alpha^m(0,h)]^{-1}\|_1\le C_8(1-x_e^2).$$

Здесь

$$e=\begin{cases} i-1 \text{ при } x<o \\ i \text{ при } x>0 ,\end{cases} \quad e_1=\begin{cases} i \text{ при } x<0 \\ i-1 \text{ при } x>0 ,\end{cases} \quad \textbf{(10)}$$

Для матриц $\beta^i(s,h)$ и $\beta^m(s,h)$ имеют место аналогичные неравенства.

Замечание. При получении неравенств (11) воспользуемся рекуррентными формулами (8).

Следствие. При достаточно малом h справедливы неравенства

$$\left\|\Omega_1^{m+1}(s,h)\right\|_1\le\begin{cases} C_{13}(1-x_{e_1}^2)^{-1}h^{m+\mu}, i=\overline{2,N-1} \\ C_{14}\,h^{m+\mu}, i=1\end{cases} \quad \textbf{(12)}$$
$$\left\|\Omega_2^{m+1}(s,h)\right\|_1\le\begin{cases} C_{15}(1-x_e^2)^{-1}h^{m+\mu}, i=\overline{1,N-2} \\ C_{16}\,h^{m+\mu}, i=N-1\end{cases}$$

где

$\Omega_1^{m+1}(s,h)=\alpha(s,h)-\alpha^m(s,h)$,

$\Omega_2^{m+1}(s,h)=\beta(s,h)-\beta^m(s,h)$,

Доказательство этих оценок аналогично самосопряженному случаю (см, [3]) .

Лемма 4. Пусть выполнены условия (3), (4) , тогда при достаточно малом h имеют место неравенства

$$(A^m\overrightarrow{v_{\bar{x}}},\overrightarrow{v_{\bar{x}}}]_h+(D^m\vec{v},\vec{v})_h\ge C_{17}(\left\|(1-x^2)^{1/2}\overrightarrow{v_{\bar{x}}}]\right\|_h+\left\|\vec{v}\right\|_h^2) \quad \textbf{(13)}$$
$$|((A^m-B^m)\overrightarrow{u_{\bar{x}}},\vec{v})_h|\le h^{1+\mu}C_{18}\left\|(1-x^2)^{1/2}\overrightarrow{u_{\bar{x}}}]\right|_h\cdot\left\|\vec{v}\right\|_h \quad \textbf{(13')}$$
$$\left\|D-D^m\right\|_1\le C_{19}h^{m+\mu}, \left\|\vec{\Phi}-\vec{\Phi}^m\right\|_1\le C_{20}h^{m+\mu} \quad \textbf{(13'')}$$

Доказательство. Докажем , что

$\lim\limits_{h\to0}D^m(0)=Q(x_i)$

На самом деле

$$\lim_{h\to0}D^m(0)=\lim_{h\to0}\{[\alpha^m(0,h)]^{-1}\int_{-1}^{0}\alpha^m(\eta,h)\tilde{Q}(\eta)d\eta+$$
$$+[\beta^m(0,h)]^{-1}\int_0^1\beta^m(\eta,h)\tilde{Q}(\eta)d\eta\}=\lim_{h\to0}\{[\alpha_0(0)]^{-1}\int_{-1}^{0}\alpha_0(\eta)\tilde{Q}(\eta)d\eta+$$
$$+[\beta_0(0)]^{-1}\int_0^1\beta_0(\eta)\tilde{Q}(\eta)d\eta\}=P(x_i)\cdot P_1^{-1}(x_i)\cdot Q(x_i)(\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{\eta}dtd\eta+\int_0^1\int_\eta^1dtd\eta=$$
$$Q(x_i)(\frac{(\eta+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{(1-\eta)^2}{2}\Big|_{0}^{1})=Q(x_i)$$

Следовательно , с учетом (3) при достаточно малом h будем иметь

$D^m(x)>k_1E$, $k_1>0$. ($k_1\in R$) .

Аналогично доказывается , что при достаточно малом h имеет место неравенство

$A^m(0) > k_2(1-x^2)E$, $k_2>0$, ($k_2 \in R$)

Выбирая $C_{17}=\min(k_1,k_2)$ получаем доказательство неравенства (13).

Доказательство неравенства (13') получаем с учетом неравенства (11) , так как

$\|A_i^m-B_i^m\|_1 \le \|A_i^m\|_1 \|\alpha^m(0,h)-\beta^m(0,h)\|_1 \|B_i^m\|_1$

$\|A_i^m\|_1 = \|[\beta^m(0,h)]^{-1}\|_1 \le C_{12}(1-x_{e_4}^2)$,

$\|B_i^m\|_1 = \|[\alpha^m(0,h)]^{-1}\|_1 \le C_8(1-x_{e_1}^2)$,

где $e_4=\begin{cases} i \text{ при } x>0 , \\ i+1 \text{ при } x<0 . \end{cases}$

$\|\alpha^m(0,h)-\beta^m(0,h)\|_1 = \|\alpha_0^i(0)-\beta_0^{i-1}+h^2(\alpha_1^i(0)-\beta_1^{i-1}(0))\|_1+O(h^2)$.

$\beta_0^{i-1}(0)=\int_{-1}^0 \widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}=\alpha_0^i(0)$.

Следовательно ,

$\|\beta^m(0,h)-\alpha^m(0,h)\|_1 \le h^2\|\beta_1^{i-1}(0)-\alpha_1^i(0)\|_1+O(h^2)$,

$\beta_1^{i-1}(0)=\int_{-1}^0\int_{\eta}^0\int_{\eta_1}^0 \widetilde{P_1^{-1}}(\eta_2)\,\tilde{Q}(\eta_1)\,\widetilde{P_1^{-1}}(\eta)d\eta_2\, d\eta_1\, d\eta$,

$\alpha_i(0)=\int_{-1}^0\int_{\mathfrak{z}}^0\int_{\mathfrak{z}_1}^0 \widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z}_2)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z}_1)\,\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}_2\, d\mathfrak{z}_1\, d\mathfrak{z}$,

здесь $\mathfrak{z}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \eta, \eta_1, \eta_2 \in (-1,0)$

После несложных преобразований получим следующие выражения:

$\beta_1^{i-1}(0)-\alpha_1{}^i(0)=\int_{-1}^0\int_{\mathfrak{z}}^0\int_{\mathfrak{z}_1}^0[(\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z}_2)-\widetilde{P_1^{-1}}(t))\,\tilde{Q}(\mathfrak{z}_1)\cdot\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z}_1)+\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})(\tilde{Q}(\mathfrak{z}_1)-\tilde{Q}(t))\,\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})+\widetilde{P_1^{-1}}(t)\tilde{Q}(t)(\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})-\widetilde{P_1^{-1}}(t))]\,d\mathfrak{z}_2\, d\mathfrak{z}_1\, d\mathfrak{z}+\int_{-1}^0\int_{\eta}^0\int_{\eta}^0 \widetilde{P_1^{-1}}(t)-\widetilde{P_1^{-1}}(\eta_2))\,\tilde{Q}(\eta_1)\tilde{P}^{-1}(\eta)+\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})-(\tilde{Q}(\eta_1)-\tilde{Q}(t))\,\tilde{P}^{-1}(\eta)+\widetilde{P_1^{-1}}(t)\,\tilde{Q}(t)(\widetilde{P_1^{-1}}(t)-\widetilde{P_1^{-1}}(\eta))]\,d\eta_2\, d\eta_1\, d\eta$, $t \in (-1,0)$

Переходя к нормам в последнем выражении имеем:

$\|\beta_1^{i-1}(0)-\alpha_1^i(0)\|_1 \le \int_{-1}^0\int_{\mathfrak{z}}^0\int_{\mathfrak{z}_1}^0[\|\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z}_2)-\widetilde{P_1^{-1}}(t)\|_1^*\cdot\|\tilde{Q}(\mathfrak{z}_1)\|_1^*\cdot\|\tilde{P}^{-1}(\mathfrak{z})\|_1^* +\|\widetilde{P_1^{-1}}(t)\|_1^*\cdot\|\tilde{Q}(\mathfrak{z}_1)-\tilde{Q}(t)\|_1^*\cdot\|\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})\|_1^*+\|\widetilde{P_1^{-1}}(t)\|_1^*\cdot\|\tilde{Q}(t)\|_1^*\cdot\|\widetilde{P_1^{-1}}(\mathfrak{z})-\widetilde{P_1^{-1}}(t)\|_1^*]\cdot d\mathfrak{z}_2\, d\mathfrak{z}_1\, d\mathfrak{z}+\int_{-1}^0\int_{\eta}^0\int_{\eta}^0[\|\widetilde{P_1^{-1}}(t)-\widetilde{P_1^{-1}}(\eta_2)\|_1^*\|\tilde{Q}(\eta_1)\|_1^*\cdot\|\widetilde{P_1^{-1}}(\eta)\|_1^*+\|\widetilde{P_1^{-1}}(t)\|_1^*\|\tilde{Q}(t)-\tilde{Q}(\eta_1)\|_1^*\cdot\|\widetilde{P_1^{-1}}(\eta)\|_1^*+\|\widetilde{P_1^{-1}}(t)\|_1^*\|\tilde{Q}(t)\|_1^*\|\widetilde{P_1^{-1}}(t)-\widetilde{P_1^{-1}}(\eta)\|_1^*]\,d\eta_2\, d\eta_1\, d\eta$

Воспользовавшись непрерывностью по Гельдеру матриц P(x), Q(x) (4), получаем неравенство

$\|\beta_1^{i-1}(0)-\alpha_1^i(0)\|_1 \le Ch^{1+\mu}(1-x^2)^{-1}$

С учетом полученных неравенств имеем

$\|A_i^m-B_i^m\|_1 \le \|A_i^m-B_i^m\|_1 \le Ch^{1+\mu}(1-x^2)$

и $\|((A^m-B^m)\overrightarrow{u_{\bar{x}}}]|_h = \|\frac{A^m-B^m}{(1-x^2)^{1/2}}(1-x^2)^{1/2}\overrightarrow{u_{\bar{x}}}]|_h \le \|\frac{A^m-B^m}{(1-x^2)^{1/2}}]|_h\|(1-x^2)^{1/2}\overrightarrow{u_{\bar{x}}}]|_h \le Ch^{1+\mu}\cdot\|(1-x^2)^{1/2}\overrightarrow{u_{\bar{x}}}]|_h$.

Теперь докажем неравенство (13'') имеем

$D-D^m=[\alpha(0,h)]^{-1}\int_{-1}^0 \alpha(\mathfrak{z},h)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}+[\beta(0,h)]^{-1}\int_0^1 \beta(\mathfrak{z},h)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}-$
$[\alpha^m(0,h)]^{-1}\int_{-1}^0 \alpha^m(\mathfrak{z},h)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}-[\beta^m(0,h)]^{-1}\int_0^1 \beta^m(\mathfrak{z},h)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}=$
$[\alpha(0,h)]^{-1}(\alpha^m(0,h)-\alpha(0,h))\,[\alpha(0,h)]^{-1}\cdot\int_{-1}^0 \alpha(\mathfrak{z},h)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}+$
$[\alpha^m(0,h)]^{-1}\int_{-1}^0 \alpha(\mathfrak{z},h)-\alpha^m(\mathfrak{z},h)\,]\cdot\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}+[\beta^m(0,h)]^{-1}(\beta^m(0,h)-\beta(0,h))\,[\beta^m(0,h)]^{-1}\cdot\int_0^1 \beta^m(\mathfrak{z},h)\,\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}+[\beta^m(0,h)]^{-1}\int_0^1(\beta(\mathfrak{z},h)\beta^m(\mathfrak{z},h))\cdot\tilde{Q}(\mathfrak{z})d\mathfrak{z}$

В силу неравенств (11) и (12) найдено искомое неравенство . Аналогично приходим к оценке нормы $\vec{\Phi}-\vec{\Phi}^m$, что и завершает доказательство

Лемма 4. Пусть $\vec{z}=\vec{y}-\vec{u}$ погрешность УРС m-го ранга .

Полагая в (10) $\vec{y}=\vec{z}+\vec{u}$, получаем следующую задачу для погрешности $\vec{z}$:

$(A^m\overrightarrow{z_{\bar{x}}})_x-D^m\vec{z}+\frac{1}{h}(B^m-A^m)\,\overrightarrow{z_{\bar{x}}}=((A-A^m)\,\overrightarrow{u_{\bar{x}}})_x+\frac{1}{h}(A^m-A+B-B^m)\,\overrightarrow{u_{\bar{x}}}+(D^m-D)\vec{u}+\vec{\Phi}-\vec{\Phi}^m$

$\|\overrightarrow{z_0}\|<\infty$, $\|\overrightarrow{z_N}\|<\infty$, $A_N=B_I=\Theta$ **(14)**

С помощью метода энергетических неравенств [3] приходим к доказательству основной теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнены условия А , тогда при достаточно малом значении h усеченная разностная схема m-го ранга (4) для задачи (1), (2) имеет m+μ – й порядок точности , т. е. справедлива оценка

$||\vec{z}||_{Vh} \leq Ch^{m+\mu}||\vec{u}||_{Vh}$, $C \neq C(h)$

Где $||\bullet||_{Vh}$-сеточный аналог нормы в пространсве V[-1;1] ,

$\vec{z}=\vec{v}-\vec{u}$ погрешность усеченной разностной схемы m-го ранга (4).

Литература

1. Авдеев А. Д. О матричных дифференциальных уравнениях второго порядка. Дифференциальные уравнения, 1977 г., т 13 №4. с 579-591
2. Лужных В. М., Макаров И. Л., Хамроев Ю.Ю. Точные и усеченные разностные схемы для краевых задач в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождением Вычислительная и прикладная математика., Киев 1983 г. №51. С3-13.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука 1977 г. 656 с.
4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., Мир. 1980г. 227с.
5. Эльшнер В. О. О разностном методе для вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1979г. 15, №5. С 828-839 .
6. Мухидинов Н. Методы расчёта показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент, “Фан”1978 г, 117 с.
7. Ibodov, N. M., Qobilov, K. H. (2022, September). EGRI CHIZIQ BILAN CHEGARALANGAN SOHANING YUZI EGRI CHIZIQLI INTEGRAL ORQALI IFODALASH. INTERNATIONAL CONFERENCES (Vol. 1, No. 11, pp. 7-11). [7]. Yuldashev T.K., Mukhamadiev F.G. The local density and the local weak density the space of permutation degree and hattori space // Ural Mathematical Journal, 2020, 6(2), p. 108-116.

QUYOSH TERMOKIMYOVIY SIKLIDA ISHTIROK ETUVCHI METALL OKSIDLARNING GIBBS ERKENERGIYASI TAHLILI VA UNING VODOROD ISHLAB CHIQISHDA AHAMIYATI

X. S. Ahmadov

O'zbekiston Fanlar akademiyasining Fizika-texnika instituti

E-mail: xushdil.ahmadov@gmail.com

S. A. Boltayev, J.H.Hamrayev

Buxoro davlat texnika universiteti

E-mail: jumaboyhamroyev7@gmail.com

Annotatsiya. *Quyosh termokimyoviy jarayonlar samarali quyosh yoqilg'isini ishlab chiqarishda muhim rol o'ynaydi, bunda metall oksidlar asosidagi redoks sikllari katta ahamiyatga ega. Ushbu tadqiqotda CeO_2 ning ikki bosqichli termokimyoviy reaksiyalarda ZnO ga nisbatan afzalliklari o'rganildi, ayniqsa kamaytirish harorati, oksidlanish kinetikasi, barqarorlik va kislorod saqlash qobiliyati bo'yicha. CeO_2, pastroq kamaytirish harorati (~800°C), tezroq oksidlanish kinetikasi va sinterlashga chidamliligi bilan yuqori samaradorlikni ko'rsatadi. Biroq, bu afzalliklarga qaramay, katalitik faollikni oshirish va redoks sikl barqarorligini yaxshilash zarurati mavjud. CeO_2 ning samaradorligini maksimal darajada oshirish va uning cheklovlarini bartaraf etish uchun yanada chuqurroq tadqiqotlar o'tkazish zarur. Shuningdek, MoO_2/Mo va SnO_2/Sn kabi metall-oksid tizimlari yuqori haroratlarni talab qilsa-da, quyosh yoqilg'isini ishlab chiqarishda va amalga oshirishda istiqbolli potentsialga ega. Bu tizimlar bo'yicha Gibbs erkenergiyasi tahlili va tajriba natijalarining taqqoslanishi ularning amalga oshirilishi va samaradorligi haqida batafsil ma'lumot beradi.*

Kalit so'zlar: *Quyosh termokimyoviy jarayon, Metal oksidlar, CeO_2, ZnO, Redoks sikllari, Gibbs energiyasi.*