



Leibniz-Zentrum für
Agrarlandschaftsforschung
(ZALF) e.V.



INTI
International
University & Colleges

**HERIOT
WATT**
UNIVERSITY
UK | DUBAI | MALAYSIA

**BUXORO DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI (BUXORO TABIIY
RESURSLARNI BOSHQARISH INSTITUTI) (O‘ZBEKISTON),**

**BIRLASHGAN MILLATLAR TASHKILOTINING
“QISHLOQ XO‘JALIGI VA OZIQ OVQAT” TASHKILOTI (FAO),**

GUMBOLT NOMIDAGI BERLIN UNIVERSITETI (GERMANIYA),

PRESOV UNIVERSITETI (SLOVAKIYA),

VALENSIYA POLITEXNIKA UNIVERSITETI (ISPANIYA),

**ZALF AGROTEXNOLOGIYALAR ILMIY TADQIQOT MARKAZI
(GERMANIYA),**

INTI XALQARO UNIVERSITETI (MALAYZIYA),

HERRIOT WATT UNIVERSITETI (MALAYZIYA)

**“YASHIL ENERGETIKA VA UNING QISHLOQ VA SUV XO‘JALIGIDAGI
O‘RNI” MAVZUSIDAGI XALQARO ILMIY VA ILMIY-TEXNIKAVIY
ANJUMANI**

MATERIALLAR TO‘PLAMI

29-30-aprel, 2025-yil

ISSN: 978-9910-10-082-6
UO·K 556.182:551.5(08)
BBK 26.222+26.236
«DURDONA» Nashriyoti

“Yashil energetika va uning qishloq va suv xo‘jaligidagi o‘rni” mavzusidagi xalqaro ilmiy va ilmiy-texnikaviy anjumani materiallar to‘plami (2025-yil 29-30-aprel) -B.: Buxoro davlat texnika universiteti (Buxoro tabiiy resurslarni boshqarish instituti), 2025.

TAHRIR HAY’ATI RAISI:
Imomov Shavkat Jaxonovich –“TIQXMMI” MTU Buxoro tabiiy resurslarni boshqarish instituti rektori, texnika fanlari doktori, professor.
BOSH MUHARRIR:
Jo‘rayev Fazliddin O‘rinovich –“TIQXMMI” MTU Buxoro tabiiy resurslarni boshqarish instituti ilmiy ishlar va innovatsiyalar bo‘yicha prorektori, texnika fanlari doktori, professor.
MUHARRIR:
Axmedov Sharifboy Ro‘ziyevich –“TIQXMMI” MTU Buxoro tabiiy resurslarni boshqarish instituti “GTI va NS” kafedrasini mudiri, texnika fanlari nomzodi, professor v.b.
TAHRIRIYAT HAY’ATI A’ZOLARI:
Ibragimov Ilhom Ahrorovich -texnika fanlari doktori, dotsent
Jo‘rayev Umid Anvarovich -qishloq xo‘jaligi fanlari doktori, professor.
Rajabov Yarash Jabborovich -texnika fanlari falsafa doktori, dotsent.
Laamarti Yuliya Aleksandrovna - sotsiologiya fanlari nomzodi, dotsent
Marasulov Abdirahim Mustafoevich - texnika fanlari doktori, professor.
Teshayev Muxsin Xudoyberdiyevich -fizika-matematika fanlari doktori, professor
Boltayev Zafar Ixtiyorovich - fizika-matematika fanlari doktori, professor
To‘xtayeva Habiba Toshevna -geografiya fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), v.b., professor.
Safarov Tolib Tojiyevich -tarix fanlari nomzodi, dotsent.
Boltayev San‘at Axmedovich -texnika fanlari nomzodi, dotsent.
Jamolov Farxod Norkulovich - texnika fanlari falsafa doktori, dotsent.
Barnayeva Muniraxon Abduraufovna - texnika fanlari falsafa doktori, dotsent.

To‘plamga kiritilgan tezislardagi ma’lumotlarning haqqoniyligi va iqtiboslarning tog‘riligiga mualliflar mas’uldir.

© Buxoro davlat texnika universiteti (Buxoro tabiiy resurslarni boshqarish instituti).
© Mualliflar
Elektron pochta manzili: buxtimi@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ

Сафаров И.И.

Ташкентский химико-технологический институт

E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев М.Х.

Бухарский филиал института математики имени В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан

Кулмуратов Н.

Навоийский государственный горно-технологический университет

Гаффоров И.И.

Бухарский государственный технический университет

Аннотация. Статья посвящена развитию теории и методов расчета колебаний вязкоупругих тороидальной оболочки на основе моментной теории. Теоретически проблема еще не поставлена в математическом аспекте, не достаточно развиты методы решения и алгоритмы, с учетом вязкоупругих свойств материала. Также недостаточно изучены проблемы выбора ядра и его реологических параметров, их влияния на частоту и коэффициент демпфирования.

Введение. Тороидальные оболочечные конструкции находят большое применение в ракетостроении, самолетостроении, судостроении и строительстве [1-3]. Такая оболочка образована вращением кольца (см. рис. 1) радиуса r относительно оси z . Расстояние центра кольца от оси обозначим через R_0 . Поскольку в литературе не имеется данных ни теоретических, ни экспериментальных о спектре частот собственных колебаний, то при практических расчетах тор иногда заменяют цилиндрической оболочкой, длина которой l равна среднему периметру тора, а радиус r равен меньшему радиусу тора [5,6]. Тор представляет собой замкнутую поверхность и потому жесткость такой оболочки значительно превосходит жесткость цилиндрической оболочки.

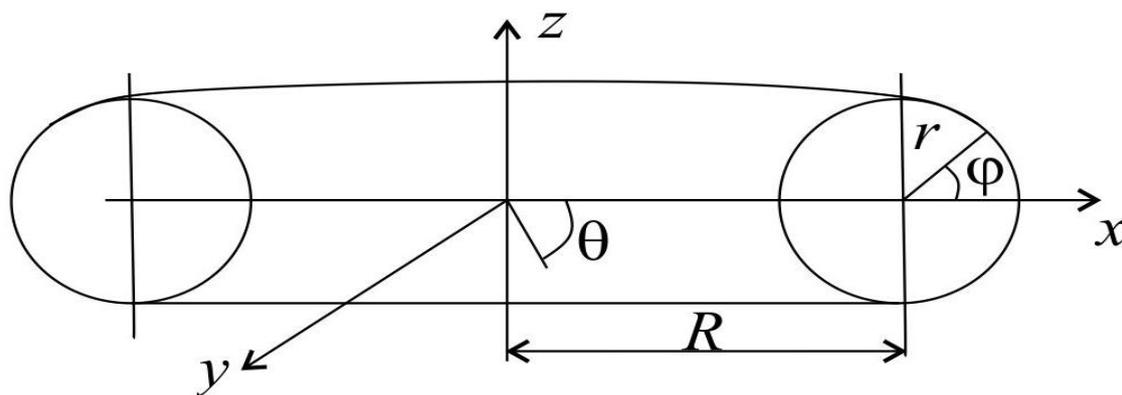


Рис.1. Элементы тороидальной оболочки

Большая жесткость тора по сравнению с цилиндром скажется не только на абсолютном значении частот, но также и на характере их распределения. Иными словами, если низшая частота собственных колебаний цилиндрической оболочки связана с минимальным числом волн в продольном направлении, то для тора это условие не соблюдается [7,8]. Низшая частота связана не только с геометрическими характеристиками, но и с определенным числом волн в направлениях θ и φ .

Геометрические параметры и параметры деформаций. Радиус произвольного сечения будет

$$R = R_0 + r \cos \varphi = R_0(1 + \alpha \cos \varphi).$$

Положение точки на поверхности тора определяется системой ортогональных криволинейных координат θ и φ . Геометрические параметры тора в обозначениях [2] будут

$$a = 0; A = R_0(1 + \alpha \cos \varphi); \beta = \varphi; B = r; \frac{1}{R_1} = \frac{\cos \varphi}{A}; \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}; \frac{1}{R_1^2} = 0$$

Для получения параметров деформаций обозначим w -перемещения по нормали к срединной поверхности; v -перемещение касательной координате $\theta = const$; u -перемещение касательной координате $\varphi = const$; На основании общих формул теории оболочек параметры деформаций растяжения будут

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi - w \cos \varphi \right); \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \sin \varphi - w \right); \omega = \frac{A}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Формулы (3) действительны не только для замкнутого тора, но и для любой тороидальной поверхности. Здесь

$$\tilde{E}[\varphi(t)] = E_0 \left[\varphi(t) - \int_0^t R_E(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right],$$

где E_0 - мгновенный модуль упругости, $R_E(t-\tau)$ - ядро релаксации, $\varphi(\tau)$ - произвольная функции времени. Предполагается, что интегральные члены в (2) –(4) малые. Тогда для функции $f(t)$ существует функция $f(t) = \varphi(t) e^{-i\omega_R t}$ и интегральные члены заменяются следующими выражениями [6] $\bar{E}_\kappa \varphi = E_{0\kappa} [1 - \Gamma_\kappa^C(\omega_R) - i\Gamma_\kappa^S(\omega_R)] \varphi$, где

$$\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \quad \Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_E(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

ответственно косинус и синус преобразования Фурье, ω_R -действительная величина.

При вычислениях используется трёхпараметрическое ядро Колтунова-Ржаницына

$$R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k} \quad [6].$$

Выбор аппроксимирующих функций. При определении частот собственных колебаний тороидальной оболочки. Так же как и при расчете цилиндрической и конической оболочек. Используются методом Ритца. Успех этого метода в многом определяется выбором аппроксимирующих функций. Перемещение целесообразно определять в виде двойного ряда функций, а именно:

$$w = \sum \sum L_{mn} W_m(\theta) W_n(\varphi), v = \sum \sum M_{mn} V_m(\theta) V_n(\varphi), u = \sum \sum N_{mn} U_m(\theta) U_n(\varphi).$$

Пусть $W_m(\theta) = \cos m\theta$ определяет колебание элементарного кольца радиуса R ; $W_n(\varphi) = \sin n\varphi$ -колебание элементарного кольца радиуса r ; m, n -целые числа; налагая на перемещение u, v, w дополнительные условия $\varepsilon_\varphi = \omega = 0$, получаем

$$w = \sum \sum L_{mn} \cos m\theta \sin n\varphi, v = \sum \sum L_{mn} \cos m\theta \frac{\cos n\varphi}{n},$$

$$u = -\alpha(1 + \alpha \cos \varphi) \sum \sum L_{mn} \sin m\theta \frac{m}{n^2} U_n^*,$$

$$\text{где } U_n^* = n \int \cos n\varphi d\varphi (1 + \alpha \cos \varphi)^2.$$

Определяем параметры деформаций для выбранных функций:

$$\varepsilon_\theta = \sum \sum L_{mn} \frac{\cos m\theta}{R} \left[\frac{m^2}{n^2} U_n^* \alpha + \right. \\ \left. + \frac{(n-1) \sin(n+1)\varphi + (n+1) \sin(n-1)\varphi}{2n(1 + \alpha \cos \varphi)} \right], \quad \varepsilon_\varphi = \omega = 0.$$

Составление характеристического уравнения. Определив параметры деформаций и составив выражение потенциальной Π и кинетической Γ энергии, находим, дифференцируя Π и Γ по L_{mn} , коэффициенты характеристических уравнений. Так как система функций, зависящих от θ , ортогональна, то вместо одного характеристического определителя такого вида:

$$\begin{vmatrix} d_{mn}^{mn} - x^2 b_{mn}^{mn} & d_{mn+1}^{mn} - x^2 b_{mn+1}^{mn} \dots \\ d_{mn}^{mn+1} - x^2 b_{mn}^{mn+1} & d_{mn+1}^{mn+1} - x^2 b_{mn+1}^{mn+1} \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{где } d_{mn}^{mn} = \alpha^2 a_{mn}^{mn}(I) + \beta a_{mn}^{mn}(II), \quad \beta = \frac{h^2}{12r^2}, \quad x^2 = p^2 r^2 \frac{1 - \mu^2}{E} \rho$$

Коэффициенты $a_{mn}^{mn}(I)$, $a_{mn}^{mn}(II)$, b_{mn}^{mn} после простейших алгебраических преобразований могут быть написаны так:

$$n^4 b_{mn}^{mn} = n^4 + n^2 + \alpha^2 \frac{m^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} U_n^{*2}(\varphi) (1 + \alpha \cos \varphi)^3 d\varphi.$$

Последний интеграл берется в рядах и для малых α и больших $n(n > 4)$ (этим членом можно пренебречь):

$$\begin{aligned} n^4 a_{mn}^{mn}(I) &= \int_0^{2\pi} \left[m^2 U_n^* \alpha + \frac{n(n-1) \sin(n+1)\varphi + (n+1) \sin(n-1)\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \pi \right]^2 \times \\ &\quad \times (1 + \alpha \cos \varphi) d\varphi, \\ n^4 a_{mn}^{mn}(II) &= n^4 \int_0^{2\pi} \left\{ (n^2 - 1)^2 \sin^2 n\varphi + \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha \cos \varphi)^2} \times \right. \\ &\quad \times \left[\alpha^2 \frac{m^2}{n^2} U_n^* \cos \varphi + \frac{n^2 - 1}{n} \cos n\varphi \sin \varphi + \alpha m^2 \frac{\sin n\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \right]^2 + \\ &\quad + 2\mu\alpha \frac{(n^2 - 1) \sin n\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \left[\alpha^2 \frac{m^2}{n^2} U_n^* \cos \varphi + \frac{n^2 - 1}{n} \cos n\varphi \sin \varphi + \alpha m^2 \frac{\sin n\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \right] + \\ &\quad + 2(1 - \mu) \frac{\alpha^2 m^2}{(1 + \alpha \cos \varphi)^2} \left[\frac{n^2 - 1}{n} \cos n\varphi + \frac{\alpha}{2n^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(1 + n^2) \cos(n-1)\varphi + (1 - n^2) \cos(n+1)\varphi}{1 + \alpha \cos \varphi} \right] \left. \right\} (1 + \alpha \cos \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Интегрирование коэффициентов a_{mn}^{mn} представляет собой значительные вычислительные трудности. Интегралы в замкнутом виде не определяются и их нужно вычислять с помощью рядов. Так как α величина малая, $0,1 < \alpha < 0,5$, то в коэффициентах $a_{mn}^{mn}(I)$, и $a_{mn}^{mn}(II)$ можно сохранить только члены α^0 и α^2 , а именно:

$$\begin{aligned} n^4 a_{mn}^{mn}(I) &\approx m^4 \alpha^2 (L_0 + L_1) + \alpha m^2 n^2 \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} A_1 + \frac{n^2}{2} \left[B_0 (n^2 + 1) + B_2 \frac{n^2 - 1}{2} \right], \\ a_{mn}^{mn}(II) &\approx (n^2 - 1)^2 + \alpha^2 \left[\frac{n^2 - 1}{2n^2} \left(B_0 - \frac{B_2}{2} \right) + 2m^2 (n^2 - 1) \times B_0 \left(\mu + (1 - \mu) \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Однако в диагональных членах величиной $\alpha^2 a_{mn}^{mn}(I)$ нельзя пренебречь по сравнению с величиной $\beta^* n^4$, так как порядок малости для ряда значений n и α одинаков. В побочных членах можно сохранить только величины $\alpha^2 a_{mn}^{mn+1}$. В формулах (14) и (15) параметры L_0, L_1, A_1, B_0, B_2 имеют следующие выражения

$$L_0 = \int_0^{2\pi} U_n^{*2} d\varphi, L_1 = \int_0^{2\pi} U_n^{*2} \cos \varphi d\varphi, B_0 = \sum_{i=0} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2i} \frac{2i!}{i!^2},$$

$$A_1 = -2 \sum_{i=0} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2i+1} \frac{(2i+2)!}{(i+1)!i!}, B_2 = 2 \sum_{i=0} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2+2i} \frac{(2i+2)!}{(i+2)!i!}.$$

Для удобства вычислений приводим таблицу 1 значений L_0, L_1 . Для оценки частоты собственных колебаний можно воспользоваться следующей приближенной формулой

$$\omega^2 \leq \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\rho r^2} \left[B_0 \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2 n^4 (n^2 - 1) + \alpha^4 m^4 (L_0 + \alpha L_1) + \alpha^3 m^2 n^2 A_1}{n^2 (n^2 + 1)} \right].$$

Таблица 1. Значения L_0, L_1 в зависимости от α и n

α	n	5	6	8	9	10
0.5	$\frac{L_0}{L_1}$	3,1724	3,1102	3,0691	3,0475	3,0392
		-3,2074	-3,0676	-2,9621	-2,9379	-2,9375
0.25	$\frac{L_0}{L_1}$	1,5032	1,4769	1,3708	1,2702	1,2158
		-1,1458	-1,1076	-1,0349	-1,0258	-1,0182

Для малых α частота собственных колебаний практически не зависит от m числа волн по радиусу большого круга. Для малого α , т. е. если $\alpha^2 \leq 2\beta n^4$, вычисление частоты осуществляется по формуле для бесконечно длинной цилиндрической оболочки. По мере уменьшения α частоты цилиндрической и тороидальной оболочек будут сближаться. Для малых n разница в частотах будет существенна из-за различия в коэффициентах α_{mn}^{mn} (I). Формулами для цилиндрической оболочки можно пользоваться только для $n > 10$.

Литература

1. Гольденвейзер А.Л., Теория упругости тонких оболочек, ГИТЕЛ, 1953.
2. Нашиф А., Джонс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний: Пер.с англ. – Москва: Мир, 1988 – 448 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек.- Киев: Науковадумка.- 1982.- 399с.
4. Ming R.S., Pan J, Norton M.P. Free vibrations of elastic circular toroidal shells, Applied Acoustics 63, 2002, 513–528
5. Jha A. K., Inman D.J., Plaut R. H. Free Vibration Analysis of an Inflated Toroidal Shell, Journal of Vibration and Acoustics 124(3), 2002, 38
6. Safarov I.I., Teshaeв M.Kh., Akhmedov M.S. Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. American Journal of Mechanics and Applications. 2018; 6(2): - Pp 37-49
7. Mirsaidov M.M., (2012) Dynamics of a viscoelastic plate carrying concentrated mass with account of physical nonlinearity of material. Part 1. PNRPU Mechanics Bulletin. Vol.7, Issue 2, 2012, pp. 143-153
8. Teshaeв M Kh, Safarov II, Mirsaidov MM 2019 Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. J. of the Serbian Society for Computational Mechanics Vol.13, 2, 105-116. DOI:10.24874/jsscm.2019.13.02.08